Petites solutions mathématiques pour garder la forme

1 Une petite equation

- On peut montrer facilement (par exemple en faisant tous les cas) qu'un carré modulo 8 est forcement congru à 0, 1 ou 4. Ou formulé mathématiquement, soit $i = 0(8)$ ou $1(8)$ ou $4(8)$, alors
$$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 = i.$$
- On peut ensuite utiliser l'equation (1) pour remarque que le cas $i = 1(8)$ est impossible.
- On a donc montré que a, b, c et d sont tous pairs. Si ils ne sont pas tous nuls, on obtient une contradiction car du fait qu'ils sont tous pairs on pourrait simplifier/extraire un nombre arbitraire de 2 de l'équation (1) tout en la vérifiant toujours.

2 La bouteille de picon empoisonnée

Ils suffit de numéroter les bouteilles de 0 à 999 et de consider la décomposition en binaire de tous les nombre de 0 à 999. On remarque que la décomposition de 999 a 10 chiffres comme le nombre de rats. Ensuite on numérote les rats goûteurs de 1 à 10, ces numéros corresponderont au 10 chiffres de la décomposition en binaire des bouteilles. On donne le picon aux rats selon le schéma suivant: si il y a un 0 dans la décomposition binaire, pas de picon pour le rat, si il y a un 1, un PEU de picon. Comme la décomposition en nombre binaire est unique, la bouteille de picon empoisonnée sera identifiée au moment de l'arrivée des invités.

3 Un gros nombre

49 (niveau seconde)

4 Compter en travaillant, c'est un bon stimulant

Il faut se rapeller que:
$$\frac{1}{(1-X)^2} = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + ... \tag{1}$$
Cela peut se montrer en se souvenant de la somme des termes d'une suite géométrique et en dérivant[1] terme à terme (on travaille dans le rayon de convergence, pas de soucis). On va commencer par $X = 1/10 = 0.1$, on obtient donc
$$\frac{1}{9^2} = 0.01 \times (1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + ...) \tag{4}$$
$$= 0.01 \times (1 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.01 + 4 \times 0.001 + ...) \tag{5}$$

[1] De façon un peu plus pédestre, on peut aussi utiliser juste la formule
$$\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + ... \tag{2}$$
puis mettre au carré, et compter un peu ce qui se passe
$$(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + ...) \times (1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + ...) = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + ... \tag{3}$$

Mais que se passe-t-il pour le 8 qui a mystérieusement disparu? Regardons ce qui se passe à ce niveau là: on a

$$8 \times X^7 + 9 \times X^8 + 10 \times X^9 + 11 \times X^{10} + 12 \times X^{11} ... \tag{6}$$

$$= 9 \times X^7 + 0 \times X^8 + 1 \times X^9 + 2 \times X^{10} + ... \tag{7}$$

Le 8 s'est tout bonnement simplifié (on rapelle que $X = 1/10$).

Bonus Des résultas similaires peuvent être prouvés pour $1/99^2$, $1/999^2$.... On peut aussi travailler dans nimporte quelle base p et montrer que

$$1/(p-1)^2 = 0.01234....(p-4)(p-3)(p-1)0123... \tag{8}$$

La chaîne youtube numberfile est pleine de jolis résultats comme ça.